

Wie hängt die ^(totale) Ableitung $Df(a)$ mit Richtungsableitungen zusammen?

Satz 18.3: Sei $U \subset X$ offen und $f: U \rightarrow Y$ in $a \in U$ total differenzierbar. Dann existieren für alle $v \in X$ die Richtungsableitungen

$$\begin{aligned}\partial_v f(a) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(a+hv) - f(a)] \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} f(a+tv)\end{aligned}$$

(analoge Def. wie im Fall $X = \mathbb{R}^n$, vgl. Def 18.2!), und es gilt:

$$Df(a)(v) = \partial_v f(a)$$

Bem: Die Umkehrung ist falsch, da φ nicht einmal stetig sein muss!

Beweis: es gilt für $w \in X$
 (vgl. Bem. im Anschluss an die Def. von $D\varphi(a)$)

$$\varphi(a+w) = \varphi(a) + D\varphi(a)(w) + |w|R(a+w)$$

mit $R: U \rightarrow Y$ stetig, $R(a) = 0$.

Sei $v \in X$ eine "Richtung" und $h \in \mathbb{R}$,
 $0 < |h| \ll 1$. Mit $w := hv$ folgt:

$$\left| \frac{\varphi(a+hv) - \varphi(a)}{h} - D\varphi(a)(v) \right| =$$

$$|v| |R(a+hv)| \longrightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

also die Beh.



Korollar: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ total diff'bar in $a \in U$. -287-

(i) für $i = 1, \dots, n$ existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)(e_i).$$

(ii) Ist $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit $\gamma(0) = a$, die in $t=0$ differenzierbar ist, so existiert $\frac{d}{dt}\bigg|_0 f(\gamma(t))$,

und es gilt

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 f(\gamma(t)) = Df(a)(\gamma'(0)).$$

Beweis: (i) klar

(ii) ist Spezialfall der späteren „Kettenregel“,
 ein direkter Beweis geht analog zum
 Beweis des Satzes: Es ist (Restgliedformel)

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + |x-a|R(x),$$

R stetig in a mit $R(a) = 0 \implies$

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(0)) = Df(a)(\gamma(t) - \gamma(0)) + |\gamma(t) - \gamma(0)| R(\gamma(t)) \xrightarrow{t \neq 0}$$

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = Df(a) \left(\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \right) + \left| \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \right| R(\gamma(t))$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} Df(a)(\gamma'(0))$$

~~$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = Df(a)(\gamma'(0))$~~

Also hat auch die linke Seite
einen Grenzwert bei $t \rightarrow 0$. $\square$

Bem: (ii) lässt sich wie folgt "umkehren":

Ist $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^M$ in

$a \in U$ längs jeder diff'baren

Kurve $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(0) = a$,

diff'bar, d.h.

$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t))$ existiert,

und ist

$\mathbb{R}^n \ni v \mapsto \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a+tv)$ linear,

so folgt die Differenzierbarkeit von
 f in a .

Ein Kriterium für totale Diff'barkeit - 290-

Satz 18.4 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^M$

Sei auf U einmal stetig partiell
diff'bar, d.h.

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ existieren und sind } \underline{\text{stetig}} \\ \underline{\text{auf } U}. \end{array} \right.$

Dann ist f an jeder Stelle $a \in U$
total diff'bar.

Bem: ① Es gilt sogar stärker:

$\left\{ \begin{array}{l} a \in U, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ existieren} \\ \text{auf einer Umgebung von } a \text{ und} \\ \text{sind } \underline{\text{stetig in } a} \end{array} \right. \implies Df(a) \text{ existiert}$

② Darstellung der Ableitung durch die Jacobi-Matrix

Wir wissen

$$Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

ist linear. Es folgt für

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in \mathbb{R}^n :$$

$$Df(a)(v) = \sum_{i=1}^n v_i Df(a)(e_i) =$$

(Korollar zu Satz 18.3)

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

D.h. : Zur linearen Abbildung $Df(a)$

gehört bzgl. der kanonischen Basen in

$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^M$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f^1(a) & \dots & \partial_n f^1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^M(a) & \dots & \partial_n f^M(a) \end{pmatrix} =: Jf(a)$$

mit n Spalten und M Zeilen. Es gilt

$$Df(a)(v) = \underbrace{Jf(a) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{\text{Anwendung der Matrix auf den Spaltenvektor } v}$$

$Jf(a)$ heißt Jacobi-Matrix von f in a .

Beweis: O.E. sei f reellwertig. (Satz 19.1 b) (Wieso?!)

Sei $a \in U$ fest. Nach Satz 18.3 + Korollar kommt als Kandidat für $Df(a)$ nur die lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \ni v \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i \in \mathbb{R}$$

in Frage. Es sei

$$\begin{cases} v^{(j)} := \sum_{i=1}^j v_i e_i = (v_1, \dots, v_j, 0, \dots, 0), \\ j = 1, \dots, n, \quad v^{(0)} := 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(a+v) - f(a) =$$

$$\sum_{j=1}^n \left[f(a+v^{(j)}) - f(a+v^{(j-1)}) \right]$$

Mit der Abkürzung

$$\gamma_j(t) := f(a+v^{(j-1)} + t v_j e_j)$$

gilt:

$$[\dots] = \gamma_j(1) - \gamma_j(0) \stackrel{=}{=}$$

$$\gamma_j'(v_j) \text{ für ein } v_j \in (0,1)$$

MWS (f ist
 $\mathbb{R}$ -wertig)
 $\downarrow$

Nach Vor. existiert $f'_j(v_j)$ und
ist

$$= \frac{\partial f}{\partial x_j} (a + v^{(j-1)} + v_j v_j e_j) v_j.$$

↑ Kettenregel für Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Es folgt:

$$\frac{1}{|v|} \left| f(a+v) - f(a) - \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| =$$

$$\frac{1}{|v|} \left| \sum_{j=1}^n v_j \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} (a + v^{(j-1)} + v_j v_j e_j) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\} \right| \leq$$

$$\sum_{j=1}^n \left| \{ \dots \} \right|.$$

Da aber $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in a stetig ist, folgt für

$$|v| \leq \delta : \left| \{ \dots \} \right| \leq \varepsilon/n$$



Ableitungsoperatoren :

-295-

① der Gradient :

$$\text{Sei } f: \mathbb{R}^n \supset U (\text{offen}) \rightarrow \underline{\mathbb{R}}.$$

Man setzt:

$$\nabla f(a) := \text{grad } f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(a)$$

falls die partiellen Ableitungen von f in a definiert sind.

Bedeutung: Ist f in a diff'bar, so gilt

$$\boxed{Df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n}$$

(vgl. Satz 18.3 + Korollar)

② die Divergenz :

Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^n \supset U \text{ (offen)} \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}^n}}$

(Anzahl der Komponenten =
Anzahl der Variablen)

$$\operatorname{div} \vec{F}(a) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{F}^i}{\partial x^i}(a),$$

falls rechte Seite definiert ist.

Merkregel:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

zum Bspl:

$$\operatorname{div} x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \equiv n.$$

beachte:

$\vec{F}$ diff'bar in $a \implies$

$$\operatorname{div} \vec{F}(a) = \operatorname{Spur} J_{\vec{F}}(a)$$

-297-

③ die Rotation (für Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$)

Sei $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ partiell diff'bar.

Man setzt:

$$\text{rot } \vec{F} := \left(\partial_2 \vec{F}^3 - \partial_3 \vec{F}^2, \partial_3 \vec{F}^1 - \partial_1 \vec{F}^3, \partial_1 \vec{F}^2 - \partial_2 \vec{F}^1 \right)$$

formal:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

rechne nach:

a) Ist $\varphi: \mathbb{R}^3 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal

stetig partiell diff'bar, so folgt:

$$\text{rot } (\nabla \varphi) = 0$$

Grund: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Frage: Erfüllt $F: \mathbb{R}^3 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Gleichung $\operatorname{rot} F = 0$, gibt es dann ein $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F = \nabla f ?$$

Antwort: ja, falls $U = \text{Kugel}$,

i.a. nein, falls $U = \text{Kugel-Mittelpunkt}$

b) Ist $F: \mathbb{R}^3 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 2-mal

stetig partiell diff'bar, so gilt:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0.$$

④ der Laplace-Operator:

Für 2-mal partiell diff'bare $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$

Sei

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

(Laplace von f)

Zeige zur Übung $(|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2})$:

$$\begin{cases} \Delta |x|^{2-n} = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n - \{0\}, n \geq 3 \\ \Delta \ln |x| = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^2 - \{0\} \end{cases}$$

□

Laplace'sches Randwertproblem:

finde $u \in C^0(\overline{U})$ mit $\Delta u = 0$

auf U und $u|_{\partial U} = u_0$ (gegeben)

↑ Lektion
24